DODATAK UDŽBENIKU ZA 8. RAZRED DEVETOGODIŠNJE ŠKOLE SUSTAVA KATOLIČKIH ŠKOLA ZA EUROPU

Izrada: Nejra Suljić

Vedran Mihić

Lektorisala: Ivana Mostarac

Tehnička obrada: Edin Tabak

Sadržaj

CIJELI RACIONALNI ALGEBARSKI IZRAZI

Konstante i promjenjive (varijable)

Različiti simboli poput -4, 1, 0, -2, 12 itd., predstavljaju razne veličine. Ukoliko upotrebljavamo simbol 4, to može biti 4 kg, 4 KM, 4 ovce, 4 automobila na parkingu ili 4 učenika u grupi. Takve simbole koji predstavljaju neku stalnu vrijednost (površina, masa, broj ...) nazivamo **konstantnim ili stalnim veličinama**. Konstantne veličine jednostavnije nazivamo konstante.

Često se spominju veličine koje mogu imati vrijednost redom 4 m, 6 m, 8 m. Ako se ta veličina mijenja, onda je označimo simbolom x, a, y, t, c ili nekim drugim slovom. Simbol *c* može označavati hipotenuzu pravokutnog trokuta ili simbol *a* može označavati duljinu stranice jednakostraničnog trokuta.

To znači da se veličina *a* može mijenjati .Tako ove veličine, koje imaju promjenjivu vrijednost, nazivamo **promjenjivim veličinama ili promjenjivim (varijable).** Promjenjive veličine su :

npr. x, y, z, t, u ,v, ... a, b, c, ... i služe kao oznake za brojeve.

Konstantne veličine i varijable spadaju u najjednostavnije izraze:

a) brojevni izraz : $\frac{2}{3}$, -2 , 0, $\frac{-5}{7}$, 13 , ...

b) varijable : x ,y,z, ... , a, b, c, ...

Algebarski izrazi

Dio matematike koji se bavi algebarskim izrazima zove se algebra. U početku se bavila samo rješavanjem jednadžbi, a kasnije se razvila u zasebni dio matematike.

Algebarski izrazi su složeniji izrazi koji se postupno grade spajanjem najjednostavnijih, već izgrađenim znacima nekih od osnovnih računskih radnji: + , -

Pr. 1. : $3-b$, $(x+2)\cdot(a-1)$, $\frac{a+2}{4}$, $4\cdot y$, $x^2\cdot(2-a)$

Cijeli racionalni izrazi. Numerička (brojevna) vrijednost racionalnog izraza.

Ukoliko u konstantnom izrazu upotrijebimo operacije zbrajanje, oduzimanje, množenje i stupnjevanje, onda se takav izraz naziva cijeli racionalni brojevni izraz.

Pr.1. : $5\cdot 3^3+2^3\cdot 7-2^2=$ itd.

$$\frac{1}{2}-2{,}5:0{,}5-5+(1-0{,}5)=itd$$

Monom ili jednočlani algebarski izraz, kao što je : x , $3b$, $\frac{2}{5}x^3$, $-5\cdot x^2\cdot y$ je izraz izgrađen od oznaka brojeva, varijabli i oznake računske operacije „· "

Svaki zapis broja smatra se monomom, npr. -2, 0, 5, -115, ...

Binom je dvočlani algebarski izraz sastavljen od dva monoma između kojih je znak „+“ ili „-„ .

Primjerice : $x+y$, $\frac{2}{3}+a$, $5x+2y^5$, $5x-4$

Tročlani algebarski izrazi, npr. $a+b+c$, $4a+5b+c$, $\frac{1}{5}x^2-\frac{2}{3}x+5$ zovu se trinomi.

Općenito, višečlani algebarski izraz je zbroj (razlika) dvaju ili više monoma, primjerice :

$$4a-\frac{5}{3}ab+5c-\frac{1}{3}abc+c+2$$

Izraz formiran od konstantnih i promjenjivih veličina, a pomoću operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja i stupnjevanja naziva se ***cijeli racionalni algebarski izraz ili polinom.***

Cijeli racionalni algebarski izraz je racionalni algebarski izraz u kojem nema operacije dijeljenja promjenjivom. Ako je operacija dijeljenja, onda je riječ o razlomljenom algebarskom izrazu.

Pr. 2. : $4\cdot x+2$; $3x^2-5x+2$; $\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{5}{6}$; $x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{5}x^2-5$

Vrijednost algebarskog izraza se izračunava kada se umjesto promjenjivih uvrste brojevne vrijednosti.

Pr. 3. Pronaći brojevne vrijednosti izraza:

a) $4\cdot x+5$ za x=2 ; => $4\cdot 2+5=8+5=13$

b) $3y^2-5y+2$ za y=1 ; => $3\cdot 1^2-5\cdot 1+2=3\cdot 1-5+2=-2+2=0$

c) $z^4+\frac{1}{3}z^3-\frac{2}{5}z^2-5$ $za\ z=-1$; =>

$$(-1)^4+\frac{1}{3}(-1)^3-\frac{2}{5}(-1)^2-5=1-\frac{1}{3}-\frac{2}{5}-5=\frac{15-5-6-75}{15}=\frac{-71}{15}$$

Koeficijenti su racionalni brojevi koji u algebarskim izrazima množe promjenjive veličine (opće brojeve).

Monomi koji se sastoje od jednakih potencija zovu se istoimeni (slični) monomi.

Primjerice: $\frac{7}{9}\cdot x^2\cdot y^3\cdot z^5$ i $-5\cdot x^2\cdot y^3\cdot z^5$

$8a^3b^7$ i $-\frac{1}{2}a^3b^7$

(Istoimeni monomi mogu imati jednake ili različite koeficijente)

<u>Zbrajanje i oduzimanje algebarskih izraza</u>

Zbrajanje i oduzimanje monoma se svodi na zbrajanje i oduzimanje jednakih potencija. Zbrajati i oduzimati možemo samo istoimene (slične) monome.

Pr. 1.

a) $4\,xy + 5\,xy = (\,4 + 5)xy$ = 9 xy

(Upotrijebimo svojstvo distributivnosti prema množenju)

b) $1{,}5\,a^2b + 3{,}2\,a^2b = (1{,}5 + 3{,}2)a^2b = 4{,}7a^2b$

c) $\frac{1}{4}$ ab-6 $ab + \frac{3}{4}ab = (\frac{1}{4} - 6 + \frac{3}{4})\,ab = -5\,ab$

Oprez!!!

$$5x^2 \neq 5 + x^2$$

$$7ab - 3a \neq 4b$$

$$9x - 9 \neq x$$

$$3a^2 + 2a \neq 5a$$

Reducirati izraz znači napisati zadani izraz na kraći način. Upravo postupak reduciranja koristimo kada u višečlanim algebarskim izrazima nalazimo istoimene monome. Višečlani algebarski izrazi reduciraju se tako da u njima zbrajamo (oduzimamo) istoimene monome.

Pr. 2. Reduciraj (pojednostavi) izraze:

a) $-5a^2 + 7a^2 + 20a^2 + 68a^2 + 12a^2 = (-5 + 7 + 20 + 68 + 12)a^2 = 102\,a^2$

b) $4a^2 + 7b - 5a^2 - 6a^2 - 2b = (4 - 5 - 6)a^2 + (7 - 2)b = -7a^2 + 5b$

c) $1 + 3x + 2x^2 - 12x^2 + 6x - x^2 + 3x^2 + 10x^2 - 7x + x^2 = 1 + (3 + 6 - 7)x +$ $(2 - 12 - 1 + 3 + 10)x^2 = 1 + 2x + 2x^2$

d) $-5x^2 - 0{,}5x^2 + 0{,}1x + 3 = (-5 - 0{,}5)x^2 + 0{,}1x + 3 = -5{,}5x^2 + 0{,}1x + 3$

Zapamti!!!

Pravila računanja su jednostavna:

- ❖ Riješe se izrazi u zagradama. Ako su zagrade ugniježđene, rješavaju se idući iznutra prema van, odnosno, prvo se riješe zagrade koje su 'najdublje' u izrazu.
- ❖ Pojednostave se izrazi koji sadrže potencije.
- ❖ Izvedu se sva množenja i dijeljenja redoslijedom kako dolaze, idući s lijeva na desno.
- ❖ Izvedu se sva zbrajanja i oduzimanja redoslijedom kako dolaze, idući s lijeva na desno.

Pr. 3. Reduciraj:

a) $(2x^2-3x)$-$[5x-(x+x^2)]$ =$2x^2-3x-[5x-x-x^2]$ =$2x^2-3x-[4x-x^2]=$

=$2x^2-3x-4x+x^2$ =(2+1)$x^2+(-3-4)x=3x^2-7x=3x^2-7x$

b) $x^2-(3x^2+2)—x^2+3=x^2-3x^2-2-x^2+3=(1-3-1)x^2+1=-3x^2+$
1

c) $a-(a+(a-(a+(a-10))))$= $a-\Big(a+\big(a-(a+a-10)\big)\Big)=$

$$=a-\big(a+(a-2a+10)\big)=a-(a+a-2a+10)=a-(2a-2a+10)$$
$$=a-10$$

Pr. 4. Reducirajmo izraz pa mu izračunajmo brojevnu vrijednost:

a)$-(2x+2x^2-3-x^2)-(2x^2-5)=-(2x+x^2-3)-2x^2+5=-2x-x^2+$
$3-2x^2+5=-2x+x^2+8$

za x=-1 => $-2x+x^2+8=-2\cdot(-1)+(-1)^2+8=2+1+8=11$

b) $a-\{3b+[(2b-a)-(3a-b)]-[(a-2b)+(3a-b)]\}=$

$=a-\{3b+[2b-a-3a+b]-[a-2b+3a-b]\}=a-\{3b+[3b-4a]-[4a-3b]\}=a-\{3b+3b-4a-4a+3b\}=a-\{9b-8a\}=a-9b+8a=9a-9b=9(a-b)$

za a=-2 , b=2

$=>$ $9(a-b)$ = 9(-2-2)= 9$\cdot(-4)=-36$

Zadaci za vježbu:

Pojednostavi izraz:

a) $-x^2yz-\frac{7}{25}x^2yz+\frac{1}{10}x^2yz=$

b) $-z^2+(2z-1)—z^2+2z-1=$

c) $(4y+2z-(1-2y))-(3z-2y+(2y-1))$

d) $3x-\{2x^3+[-4x^2-(5x^3+1)]-x\}-x^3$

Množenje i dijeljenje algebarskih izraza

Monom se množi monomom tako da pomnožimo koeficijent s koeficijentom, a zatim glavnu veličinu s glavnom veličinom.

Pr. 1. Pomnoži:

a) $4a^2b^4c \cdot (\frac{-1}{2})a^3c^2 = \frac{-4}{2}a^{2+3}b^4c^{1+2} = -2a^5b^4c^3$

b) $(-1{,}01)x^0yz^0 \cdot (-50)z^2 = 50{,}5 \cdot 1 \cdot y \cdot 1 \cdot z^2 = 50{,}5 \cdot y \cdot z^2$

c) $\left(\frac{-2y}{36x^{-1}}\right) \cdot \frac{12x^2y^3}{3^{-1} \cdot 2 \cdot y^{-2}} = \frac{-2yx}{36} \cdot \frac{12 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot y^2}{2} = \frac{-1yx}{18} \cdot 18x^4y^3 = -1x^5 \cdot y^4 = -x^5 \cdot y^4$

Monom se dijeli monomom tako da podijelimo koeficijent s koeficijentom, a zatim glavnu veličinu s glavnom veličinom.

Pr. 2.

a) $(3x^8y^4z^2) : (-9x^5y^2z) = \frac{-1}{3}x^3y^2z$

b) $\left(\frac{-2}{3}a^3b^3c^5\right) : (\frac{-4}{9}a^2c^3) = \left(\frac{-2}{3} \cdot a^3 \cdot b^3c^5\right) : \left(\frac{-4}{9} \cdot a^2 \cdot c^3\right) = \frac{-2}{3} \cdot \frac{9}{-4} \cdot a^{3-2} \cdot b^3 \cdot c^{5-3}$

$= \frac{3}{2} \cdot a \cdot b^3 \cdot c^2$

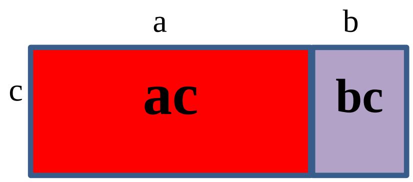
Množenje i dijeljenje višečlanih algebarskih izraza i monoma

Zbroj (razliku) dvaju brojeva množimo brojem tako da sve pribrojnike pomnožimo tim brojem i dobivene umnoške zbrojimo (oduzmemo).

$$\boxed{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

umnožak zbroj

Ilustracija navedenog svojstva!



Ako promatramo pravokutnike na slici, možemo uočiti da je površina najvećeg pravokutnika jednaka:

(a+b)$\cdot$ c, a ta površina je jednaka zbroju površina dvaju manjih pravokutnika, tj. $ac + bc$

Zbog svojstva distributivnosti množenja vrijedi $a \cdot (b + c) = ab + ac$. Upotrijebimo li to svojstvo u obrnutom smjeru, kažemo da smo izlučili zajednički faktor.

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

Izlučivanje zajedničkog faktora ispred zagrade

Pr. 1. Izluči zajednički faktor ispred zagrade :

a) $2ab + 2a^2 + 4ab^2 = 2a(b + a + 2b^2)$

b) $b^2x^2 + bx + x = x(b^2x + b + 1)$

c) $\left(\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}\right)\frac{2}{3}a = \frac{1}{2}a \cdot \frac{2}{3}a + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}a = \frac{2}{6}a^2 + \frac{6}{12}a = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{6}a$

d) $\frac{3}{5}b^3a \cdot \left(\frac{1}{3}b^2 - \frac{3}{4}a^2\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}b^5a - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}a^2 = \frac{3}{15}b^5a - \frac{9}{20}a^2$

Pr. 2. Izvrši naznačeno množenje pa reduciraj:

a) $(3a - 4b) \cdot b - 2b(3a + 5b) + (4a^2 - 9b^2) \cdot (-1) = 3ab - 4b^2$-6ab-10$b^2 - 4a^2 + 9b^2 =$

$= -5b^2 - 4a^2 - 3ab$

b) $(xy^2 - x^2y - x^3) \cdot 3x^2y^2 = 3x^3y^4 - 3x^4y^3 - 3x^5y^2$

Dijeljenje zbroja i razlike brojem:

$$(a+b):c = a:c + b:c$$

$$(a-b):c = a:c - b:c$$

Binom se dijeli monomom tako da se i jedan i drugi član binoma podijeli monomom pa se dobiveni količnici zbroje (oduzmu).

Pr. 1 Podijeliti binome s monomima:

a) $\left(\frac{3}{5}a^3b^4c + \frac{2}{3}a^4b^2c^2\right):\frac{1}{5}abc = \frac{3}{5}:\frac{1}{5}a^2b^3 + \frac{2}{3}:\frac{1}{5}a^3bc = \frac{3}{1}a^2b^3 + \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{1}a^3bc =$

$= 3a^2b^3 + \dfrac{10}{3}a^3bc$

b) $(x^4 - 3x^3 + 5x^2):7x^2 = \frac{1}{7}x^2 - \frac{3}{7}x + \frac{5}{7}$

c) $(9x^3y - 15x^2y^2 + 39xy^3):(-3xy) = -3x^2 + 5xy - 13y^2$

d) $(70x^{-2} + x^{-1}y^2):(-100x^{-3}y^{-1}) = \left(70\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\cdot y^2\right):\left(-100\cdot\frac{1}{x^3}\cdot\frac{1}{y}\right) = -0{,}7\cdot$
$\frac{1}{x^2}:\frac{1}{x^3y} - 0{,}01\frac{1}{x}\cdot y^2:\frac{1}{x^3y} = -0{,}7\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^3y}{1} - 0{,}01\frac{y^2}{x}\cdot\frac{x^3y}{1} = -0{,}7xy - 0{,}01x^2y^3$

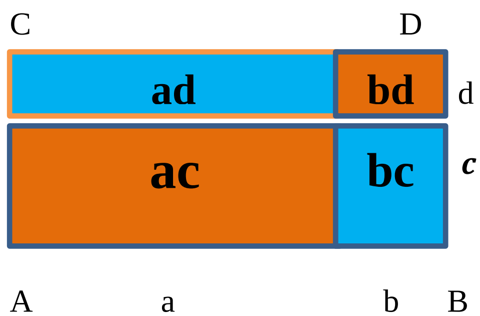
Množenje binoma s binomom

Binom množimo binomom tako da svaki član jednog binoma pomnožimo sa svakim članom drugog binoma, a dobiveni umnošci se zbroje.

$$\boldsymbol{(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+bc+bd}$$

$$\boldsymbol{(a-b)\cdot(c-d)=ac-ad-bc+bd}$$

Promatrajte ilustraciju:



Površina pravokutnika ABCD jednaka je :

$$\boldsymbol{(a+b)\cdot(c+d).}$$

Pr. 1.

a) $(4x+2y)\cdot(5x-y)=20x^2-4xy+10xy-2y^2=20x^2+6xy-2y^2$

$b)$ $(3x^3-3y)\cdot(x^2+8y)=3x^5+24x^3y-3x^2y-24y^2$

c) $\left(\frac{2}{5}a^2b+\frac{1}{3}a^3b^2\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a+\frac{5}{4}a^4b^3\right)=\frac{4}{15}a^3b+\frac{10}{20}a^6b^4+\frac{2}{9}a^4b^2+\frac{5}{12}a^7b^5=\frac{4}{15}a^3b+\frac{1}{2}a^6b^4+\frac{2}{9}a^4b^2+\frac{5}{12}a^7b^5$

d)$[(x+4y)-3xy]\cdot[5xy-(2x-2y)]=[x+4y-3xy]\cdot[5xy-2x+2y]=5x^2y-2x^2+2xy+20xy^2-8xy+8y^2-15x^2y^2+6x^2y-6xy^2=11x^2y+14xy^2-2x^2+8y^2-15x^2y^2-6xy$

Zadaci za vježbu :

1. Pomnoži:

a) $(a+c)(b+d)$

b)$(4 + x)(y - 5)$

c) $(\frac{2}{5}x^5 + 3)(\frac{1}{3}x - \frac{5}{7})$

2. Pomnoži pa reduciraj:

a) $(xy + y^2) \cdot (x^2 - 2xy)$

b) $(a - 8b) \cdot [-3a - 4a(2 + 3a)]$

c) $[-7x - (x - 5)] \cdot [x + 2(5x^2 - 1) - 5]$

d) $(\frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2}) \cdot (\frac{3}{2}x - 2)$

POLINOMI (CIJELE RACIONALNE FUNKCIJE)

Prethodno navedeno gradivo predstavlja uvod u cijele racionalne funkcije, koje još nazivamo polinomi. U nižim razredima ste upoznali pojam funkcije te ste promatrali primjere nekih funkcija. Najjednostavniji primjeri realnih funkcija su polinomi.

Izraz formiran od konstantnih i promjenjivih veličina, a pomoću operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja i stupnjevanja naziva se ***cijeli racionalni algebarski izraz ili polinom***

Treba imati u vidu da dijeljenje izrazom koji sadrži promjenjivu u općem slučaju nije dozvoljeno kod polinoma. Polinomi se sastoje od gradivnih elemenata koji se nazivaju monomi, a oni se sastoje od konstante (koja se naziva koeficijentom), pomnožene jednom ili više promjenjivih (koje se obično predstavljaju slovima).

Svaka promjenjiva može imati konstantan pozitivan cijeli broj kao eksponent. Eksponent nad promjenjivom u monomu je jednak stupnju te promjenjive u monomu.

Kako je $x = x^1$ stupanj promjenjive, bez zapisanog eksponenta je jedan.

Monom bez promjenjivih se naziva konstantnim monomom ili jednostavno konstantom. Eksponent konstante je 0. Koeficijent monoma može biti bilo koji broj, uključujući razlomke, iracionalne i negativne brojeve.

Npr. $-14a^2b$ je monom.

(Koeficijent je -14, a promjenjive su a i b. Stupanj promjenjive a je dva, a stupanj promjenjive b je jedan.)

Stupanj cijelog monoma je zbroj stupnjeva svake promjenjive u njemu. U gornjem primjeru je stupanj jednak 2 + 1 = 3.

Polinom predstavlja zbroj jednog ili više monoma.

Npr. $4x^2 - 5x + 10$

Sastoji se od tri monoma: prvi je stupanj dva, drugi je stupanj jedan, a treći je stupanj nula. Polinom se obično zapisuje tako da monomi višeg stupnja dolaze prije onih nižeg stupnja. U prvom monomu, koeficijent je 4, promjenjiva je x, a eksponent je dva. U drugom monomu, koeficijent je -5. Treći je konstanta.

Stupanj polinoma je najveći stupanj nekog njegovog monoma.

(Npr. gornji polinom ima stupanj dva)

Polinom stupnja jedan se naziva ***linearn****i*, polinom stupnja dva se naziva **kvadratni,** a onaj stupnja tri se naziva ***kubni.***

Polinom koji se sastoji od jednog monoma se i sam naziva *monom*. Polinom koji se sastoji od dva monoma je *binom*, dok je onaj od tri monoma *trinom*. Izraz koji se može transformirati u polinom kroz niz primjena komutativnih, asocijativnih i distributivnih zakona se obično i sam smatra polinomom.

Polinome zadane formulom smo ranije upoznali, kao:

$$p(x) = 4x + 5$$

$$p(x) = a_1 x + a_0$$

Nazivamo polinom prvog stupnja, ako je $a_1 \neq 0$.

$$p(x) = 4x^2 - 3x + 7$$

$$p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Nazivamo polinom drugog stupnja ako je $a_2 \neq 0$.

Ili općeniti zapis polinoma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ je polinom n-tog stupnja ako je $a_n \neq 0$.

$Brojevi\ a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0\ su\ realni\ brojevi\ a\ zovu\ se\ koeficijenti\ polinoma$.

Stupanj polinoma je najveći eksponent varijable x, to je broj n i označava se oznakom deg f (engl. degree= stupanj).

Pr. 1. Odredi vrijednost polinoma :

a) P(x) = 6x-3   za x= 4

U polinomu P(x) zamijenimo x s brojem 5:

P(5)=6$\cdot 5-3=30-3=27$

b) Q(x)=$3x^2-4x+1 \quad za\ x=-2$

Q(-2)=3$\cdot(-2)^2-4\cdot(-2)+1=3\cdot 4+8+1=21$

Pr.2. Odredi stupanj polinoma:

a) P(x) =$7x+3 \quad , polinom\ je\ prvog\ stupnja$

b) Q(x)= 3-19x+$\frac{7}{2}x^3$ $, polinom\ je\ trećeg\ stupnja$

c) R(x) = 16, polinom je nultog stupnja

Računske operacije s polinomima

Zbrajanje i oduzimanje polinoma

Da bismo zbrajali dva ili više polinoma, napisat ćemo ih jedan za drugim i srediti dobiveni polinom. Rezultat tih operacija je uvijek polinom. Za zbrajanje polinoma vrijede ista pravila kao i za računske operacije s cijelim brojevima.

Pr. 1. Zbrojimo polinome:

f(x)=$3x^2-4x+7$ $\qquad g(x)=2x^3-4x^2-6x+5$

Rješenje:

$$f(x)+g(x)=(3x^2-4x+7\,)+(2x^3-4x^2-6x+5)$$
$$=3x^2-4x+7\ +2x^3-4x^2-6x+5=2x^3-x^2-10x+12$$

Pr. 2. Zbrojimo polinome:

f(x)= $x^2-2xy+y^2$ $\qquad g(x)=2y^2-3x^2$ $\qquad h(x)=10xy+y^3$

Rješenje:

$$f(x)+g(x)+h(x)=(x^2-2xy+y^2)+(2y^2-3x^2)+(10xy+y^3)$$
$$=x^2-2xy+y^2+2y^2-3x^2+10xy+y^3=-2x^2+8xy+3y^2+y^3$$

Kod oduzimanja polinoma imamo jedan korak više. Trebamo promijeniti sve znakove polinoma koji oduzimamo (polinom koji se oduzima obavezno staviti unutar zagrada).

Pr. 3. Oduzmimo polinome:

$$p(x)=5b^2-2a^2 \qquad od \qquad q(x)=4a^2-8ab-9b^2$$

Rješenje:

p(x)-q(x)=$(4a^2-8ab-9b^2)-(5b^2-2a^2)=4a^2-8ab-9b^2-5b^2+2a^2=$
$6a^2-8ab-14b^2$

Pr. 4. Zadani su polinomi:

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 2$$

$$g(x) = x^2 - 2x + \frac{2}{3}$$

$$h(x) = \frac{3}{4}x^2 - x + 2$$

$$f(x) + g(x) - h(x) = \left(\frac{1}{2}x - 2\right) + \left(x^2 - 2x + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{4}x^2 - x + 2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}x - 2 + x^2 - 2x + \frac{2}{3} - \frac{3}{4}x^2 + x - 2 =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{10}{3}$$

Napomena: zbrajanje i oduzimanje polinoma predstavlja zbrajanje i oduzimanje koeficijenata jednakih potencija.

Pr. 5. Izračunaj f(x)-h(x)-g(x) ako je zadano :

f(x)=$2x^2 - x$

g(x)=$\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + 2$

h(x)=$-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

f(x)-h(x)-g(x)=

$$= (2x^2 - x) - \left(-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + 2\right)$$
$$= 2x^2 - x + x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 2 = \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{11}{4}$$

Zadaci za vježbu:

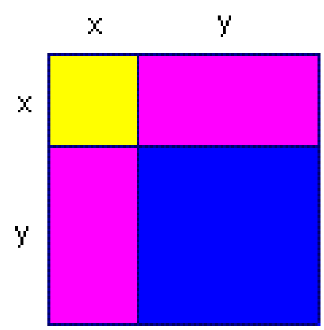
Izračunaj: f(x)+g(x) i f(x)-g(x) ako je zadano :

a) f(x)=$2x - 4$ $\quad g(x) = x^2 - x + 1$

b) f(x)=$2x^2 - x$ $\quad g(x) = 3x^2 - 2x - 4$

c) f(x) =$\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + 2$ $\quad g(x) = -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

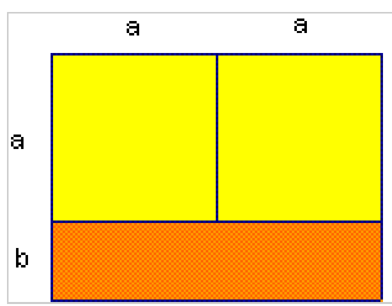
Pr. 6. Napišimo polinom koji predstavlja površinu figure na slici:



Rješenje: Ova figura se sastoji od dva kvadrata i dva pravokutnika. Plavi kvadrat ima površinu y^2. Žuti kvadrat je površine x^2. Rozi pravokutnici su površine xy. Da bismo našli ukupnu površinu, samo ćemo ih zbrojiti:

$$P = y^2 + x^2 + xy + xy = y^2 + x^2 + 2xy$$

Pr. 7. Napišimo polinom koji predstavlja površinu figure na slici:



Rješenje: Ova figura se sastoji od dva kvadrata i pravokutnika. Žuti kvadrati imaju površinu a^2. Narančasti pravokutnik je površine $2ab$. Da bismo dobili ukupnu površinu, ponovno ćemo zbrojiti dijelove:

$$P = a^2 + a^2 + 2ab = 2a^2 + 2ab$$

Množenje polinoma

Isto kao što možemo zbrajati i oduzimati polinome, možemo ih množiti. Koristimo zakon distributivnosti i pravila koja ste naučili radeći s potencijama.

Kada množimo polinome, uvijek moramo imati na umu pravila za množenje potencija koja smo ponovili u prethodnim lekcijama. Posebno je važno sljedeće pravilo:

$$\boxed{x^m \cdot x^n = x^{m+n}}$$

Ako izrazi koje množimo sadrže koeficijente i više od jedne promjenjive, množimo koeficijente kao i bilo koje brojeve i primjenjujemo gornje pravilo na svaku od promjenjivih.

Polinomi se množe tako da se svaki član prvog polinoma pomnoži sa svakim članom drugog polinoma i dobiveni umnošci zbroje.

Pr. 1. Neka su zadani polinomi f(x)=$2x^2 - x + 2$ i $g(x) = 3x - 2$

Izračunajmo: f(x)$\cdot$ $g(x)$ =?

Rješenje:

f(x)$\cdot$ $g(x) = (2x^2 - x + 2) \cdot (3x - 2) = 6x^3 - 4x^2 - 3x^2 + 2x + 6x - 4 =$

$= 6x^3 - 7x^2 + 8x - 4$

Pr. 2. Izračunajmo f $\cdot$ g =? $ako\ je$ $f(x) = 4x - 1$ i $g(x) = 2x^3 - x^2 + 3$

Rješenje:

f $\cdot$ g = $(4x - 1) \cdot (2x^3 - x^2 + 3) = 8x^4 - 4x^3 + 12x - 2x^3 + x^2 - 3 = 8x^4 - 6x^2 + 12x - 3$

Pr. 3. Izračunaj $f \cdot g$ =? $ako\ je\ f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{4}$ $g(x) = \frac{3}{2}x - 2$

f$\cdot g=\left(\frac{2}{3}x^2-2x+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}x-2\right)=\frac{6}{6}x^3-\frac{4}{3}x^2-3x^2+4x+\frac{3}{8}x-\frac{1}{2}=x^3-\frac{13}{3}x^2+\frac{19}{4}x-1$

Zadaci za vježbu:

1. Izračunaj umnožak polinoma: f(x) i g(x) ako je zadano:

a) f(x)= 4x+3 , g(x)=7x-1

b) f(x)=$4x^3+3x+5$, $g(x)=x^2-3x+2$

c) f(x)= $\frac{1}{3}x+3$, g(x)=$\frac{1}{3}x^4-5x^2+x$

2. Za polinom f(x)=5x-3, g(x)=3x+6 , h(x)=x-1 dokaži da vrijedi:

a) f(x)+g(x)=g(x)+f(x)

b) (f$\cdot g)\cdot h=f\cdot(g\cdot h)$

c) (f+g) + h=f + (g+h)

d) (f+g)$\cdot h=f\cdot h+g\cdot h$

Dijeljenje polinoma

Podsjetimo se dijeljenja prirodnih brojeva zbog toga što je dijeljenje polinoma slično dijeljenju prirodnih brojeva.

Ponovimo postupak dijeljenja u skupu N.

7542:34=221
68
  74
  68
    62
    34

(28) ostatak

$$\frac{7542}{32} = 221 + \frac{28}{34}$$

Sada vidimo da ostatak pri dijeljenju dva broja nije nista više nego nedovršena operacija dijeljenja i ako želimo pravilno zapisati, onda treba pisati i djelitelj.

Ponovimo ovaj postupak kod dijeljenja polinoma:

Pr. 1.

Podijeliti polinome f : g ako je : f(x)=$3x^4 - 8x^3 + 13x^2 - 14x + 5$ i g(x)=2-x +x^2

Rješenje : ($3x^4 - 8x^3 + 13x^2 - 14x + 5$) : (x^2-x+2)=$3x^2 - 5x + 2$
$3x^4 - 3x^3 + 6x^2$
- + -
$-5x^3 + 7x^2 - 14x + 5$
$-5x^3 + 5x^2 - 10$
+ - +
$2x^2 - 4x + 5$
$2x^2 - 2x + 4$
- + -
-2x+1

Količnik je: q(x)= $3x^2 - 5x + 2$ i ostatak r(x)= -2x+1 .

Možemo zaključiti da vrijedi:

Ako je stupanj polinoma f(x) veći ili jednak stupnju polinoma g(x), onda postoje polinomi q(x) i r(x) takvi da vrijedi :

$$f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x)$$

Pr. 2. Podijeliti polinome:

$$(3x^3+2x^2-3x+1):(x+3)=3x^2-7x+18$$

$$\begin{array}{l} 3x^3+9x^2 \\ \ \ -\quad - \\ \hline \quad -7x^2-3x \\ \quad -7x^2-21x \\ \quad + \qquad + \\ \hline \qquad\qquad 18x+1 \\ \qquad\qquad 18x+54 \\ \qquad\qquad - \quad - \\ \hline \end{array}$$

(-53) ostatak

Zadaci za vježbu:

Izračunaj količnik polinoma f i g ako je zadano :

a) $f(x)=x^2-2x-3$, $g(x)=x-3$

b) $f(x)=13x^2-11x+6$, $g(x)=3x-2$

c) $f(x)=2x^3-3x^2-8x-3$, $g(x)=2x+1$

d) $f(x)=8x^3-1$, $g(x)=2x-1$

e) $f(x)=3x^2+2x+6$, $g(x)=x+2$

RASTAVLJANJE ALGEBARSKIH IZRAZA NA PROSTE FAKTORE

Rastaviti algebarski izraz na proste faktore (faktorizirati algebarski izraz) znači napisati ga u obliku produkta algebarskih izraza koji se ne mogu dalje rastaviti.

Algebarski izraz koji se ne može napisati u obliku proizvoda drugih algebarskih izraza naziva se **prosti algebarski izraz.**

Uočimo najjednostavnije načine rastavljanja algebarskih izraza na proste faktore.

Izlučivanje zajedničkog faktora

U nekim algebarskim izrazima svaki član ima zajednički faktor, npr. na + nb + nc. Primjenom metode distribucije prema zbrajanju i oduzimanju, zajednički faktor n možemo izlučiti ispred (ili iza) zagrade.

$$na + nb + nc = n\,(a + b + c)$$

Svi ovi članovi algebarskog izraza imaju zajednički faktor, onda se taj zajednički faktor izluči ispred (iza) zagrade.

Pr. 1. Rastavimo na faktore:

$a)\ 5a + 5b = 5\,(a + b)$

$b)\ ax - bx = x\,(a - b)$

$c)\ 7x + 14y = 7\,(x + 2y)$

$d)\ \frac{27}{50}a + \frac{27}{100}b + \frac{27}{25}c = \frac{27}{25}(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b + c)$

$e)\ -2x - 4y = -2(x + 2y)$

$f)\ b - a = -1(-b + a) = -(a - b)$

$g)\ 3a + 6b - 15 = 3\,(a + 2b - 5)$

$h)\ 40a^2b^2 - 20ab^2 = 20ab^2(2ab - 1)$

$i)\ 7x\,(a - 1) + (a - 1) = (a - 1)(7x + 1)$

$j)\ (-a - b) + x\,(b + a) = (-1)(a + b) + x\,(a + b) = (a + b)(x - 1)$

Rastavljanje na proste faktore grupiranjem članova

***A)** Često se javljaju algebarski izrazi koje ne možemo rastaviti na faktore izlučivanjem zajedničkog faktora svih članova, izraza niti primjenom formula, ali je moguće grupirati članove u više grupa tako da svaka grupa ima zajednički faktor. Kad se taj zajednički faktor izluči, dobije se algebarski izraz koji se rastavlja na već poznati način.

Pr. 1. Rastavimo na faktore:

a) $ax + ay + bx = (ax + ay) + (bx + by) = a\,(x + y) + b\,(x + y) =$
$= (x + y)(a + b)$

b) $a + b + ac + bc = (a + b) + c\,(a + b) = (a + b) = (a + b)(1 +$
$c) =$
$= (a + b)(c + 1)$

c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 9 = x^2\,(x - 3) + 3\,(x - 3) = (x - 3)(x^2 + 3)$

d) $5 + a^2 - 5a - a^2 = (5 + a^2) - a(5 + a^2) = (5 + a^2)(1 - a)$

e) $a^2 - 6a + 9 - b^2 = (a^2 \cdot 6a + 9) - b^2 = (a - 3)^2 - b^2 = (a \cdot 3 + b)(a \cdot 3 \cdot b)$

f) $(x \cdot 1)(x \cdot 2)(x \cdot 3) + (x \cdot 1)(x \cdot 2)(x \cdot 3) = (x - 1)(x - 2)[(x - 3) +$
$1] - (x - 1) = (x - 1)(x - 2)(x - 2) - (x - 1) = (x - 1)[(x - 2)^2 - 1] =$
$(x - 1)(x - 2 + 1)(x - 2 - 1) = (x - 1)(x - 1)(x - 3)$

***B)** Pri rastavljanju nekih algebarskih izraza na faktore prikladno je uvesti pomoćne članove ili neke članove napisati kao zbroj dvaju ili više članova.

Pr. 2. Rastavimo na faktore:

a) $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 - 4x^2 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 - 2x \cdot$
$2) =$
$=(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$

b) $x^3 + x^2 + 4 = x^3 + 8 - 8 + x^2 - 4 = (x + 2)(x^2 \cdot 2x + 4) + (x + 2)(x - 2) = (x + 2)(x^2 \cdot 2x +$
$4 + x \cdot 2) =$
$=(x + 2)(x^2 - x + 2)$

***C)** Rastavljanje kvadratnog trinoma na faktore

Neki trinomi $ax^2 + bx + c$ na koje se ne mogu primjeniti poznate formule za rastavljanje na faktore mogu se rastaviti na sljedeći način:

Srednji član trinoma rastavimo na dva dijela tako da je zbroj njihovih koeficijenata jednak b, a proizvod tih koeficijenata a. c. Tada ćemo grupiranjem prvih dvaju članova i drugih dvaju članova taj trinom rastaviti na faktor: $x^2 + (p + q)x + p \cdot q = (x \cdot p)(x \cdot q)$.

ALGEBARSKI IDENTITETI

Kvadrat zbroja

Pr. 1. Pomnožimo međusobno dva jednaka zbroja (a+b) i (a+b).

$$(a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a^2 + 2ab + b^2.$$

Umnožak $(a+b)\cdot(a+b)$ možemo napisati u obliku $(a+b)^2$ i nazivamo ga ***kvadratom zbroja.*** Dobili smo jednakost

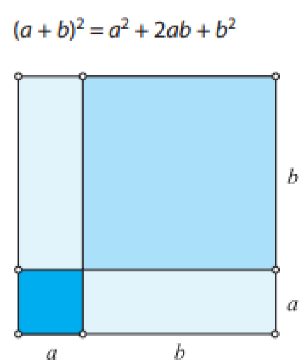
$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

Kvadrat zbroja jednak je zbroju kvadrata prvog zbroja, dvostrukog produkta prvog i drugog zbroja i kvadrata drugog zbroja.

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Zamijenimo li u prethodnom izrazu broj a s I , a broj b s II ,
dobivamo formulu za kvadrat zbroja.

$$\boxed{(I+II)^2 = I^2 + 2\cdot I\cdot II + II^2}$$



Pr. 2. Kvadrirajmo $(a+3)^2$ a) koristeći se formulom, b) množenjem.

a) $(a+3)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9.$

b) $(a+3)^2=(a+3)\cdot(a+3)=a^2+3a+3a+9=a^2+6a+9$.

Pr. 3. Kvadrirajmo:

a) $(2a+4b)^2=4a^2+2\cdot 2a\cdot 4b+16b^2=4a^2+16ab+16b^2$,

b) $=\frac{4}{9}a^2+2\cdot\frac{2}{3}a\cdot\frac{3}{4}+\frac{19}{6}=\frac{4}{9}a^2+a+\frac{19}{6}$,

c) $=0{,}25a^2+0{,}1a+0{,}01$

Zadaci za vježbu:

Kvadriraj: a) $(5a+3)^2$, b) $(2a+3b)^2$, c) $\left(\frac{1}{2}a+2\right)^2$.

<u>Kvadrat razlike</u>

Pr. 1. Pomnožimo $(a-b)$ sa $(m-n)$, tj. izračunajmo produkt $(a-b)\ (m-n)$.
Množit ćemo član prve razlike sa svakim članom druge razlike:

$$(a-b)(m-n)=a(m-n)-b(m-n)=am-an-bm+bn.$$

Pr. 2. Pomnoži: a) $(c-7)(b-3)$ $b)$ $(2-0{,}3a)(3-0{,}2b)$.

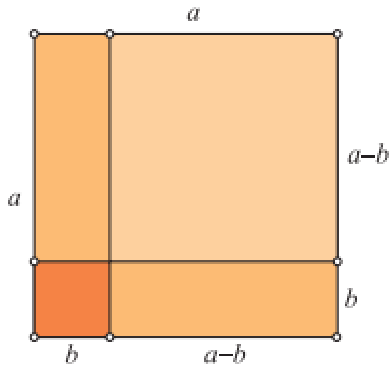
Kvadrirajmo sada razliku $(a-b)$:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2.$$

Dobili smo formulu:

$$\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$



Razlika kvadrata

Izračunajmo produkt zbroja i razlike dvaju racionalnih brojeva:

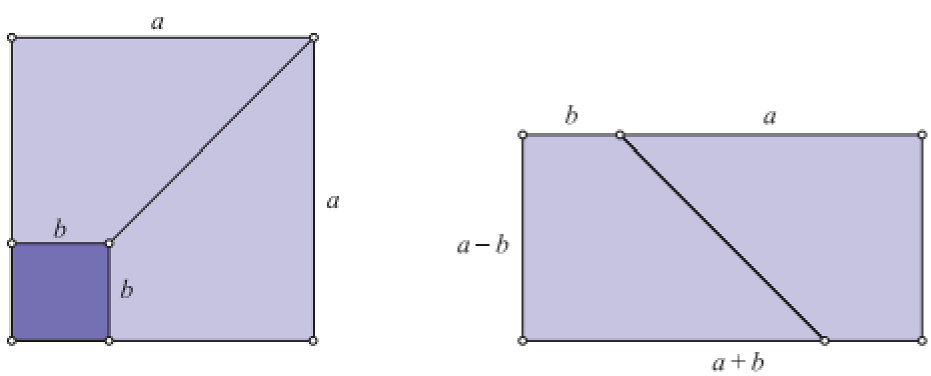
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Zbroj brojeva pomnožen njihovom razlikom daje razliku kvadrata tih brojeva tj.

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2,\ pa\ vrijedi:$$

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b).}$$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$



Pr. 1. Pomnožimo:

$a)$ $(a+2)(a-2)$=$a^2-2\mathrm{a}+2\mathrm{a}-4=a^2-4$

b) $(3\mathrm{a}+8\mathrm{b})(3\mathrm{a}-8\mathrm{b})$=$9a^2-24ab-64b^2$=$9a^2-64b^2$

$c)$ $\left(\frac{2}{9}a+\frac{8}{5}\right)\left(\frac{2}{9}a-\frac{8}{5}\right)$=$\frac{2}{9}a\cdot\frac{2}{9}a-\frac{2}{9}a\cdot\frac{8}{5}+\frac{2}{9}a\cdot\frac{8}{5}-\frac{8}{5}-\frac{8}{5}=\frac{4}{81}a^2$-$\frac{64}{25}$.

d) (3a+2b)(3a-2b)=$9a^2-4b^2$

e) ($\frac{1}{3}+2x$) $\left(\frac{1}{3}-2x\right)=\frac{1}{9}-4x^2$

f) ($3x^2yz^{-1}+\frac{5}{7}x^5y^{-2}z$) $\left(3x^2yz^{-1}-\frac{5}{7}x^5y^{-2}z\right)=9x^4y^2z^{-2}-\frac{25}{49}x^{10}y^{-4}z^2$

g) $(79-x)^2-(7-x)(7+x)-(79-x)^2=-(49-x^2)=x^2-49$

Zadaci za vježbu:

Izračunati:

a) $(3+2b)(3-2b)$

b) $(7a+8b)(7a-8b)$

c) $(7+0{,}1a)(7-0{,}1a)$

Pr. 2. Napišimo u obliku razlike kvadrata sljedeće produkte:

$a)$ $(12a+3)(12a-3)$=$(12a)^2-3^2=144a^2-9$

$b)$ $(13x+17x)(13x-17x)$=$(13x)^2-(17y)^2=169x^2-289y^2$

$c)$ $(7{,}8+0{,}5z)(7{,}8-0{,}5z)$=$7{,}8^2-(0{,}5z)^2$= $60{,}84-0{,}25z^2$.

Zadaci za vježbu:

Izračunaj:

$a)$ $(4a+5b)(4a-5b)$ $\quad$ $b)$ $\left(\frac{9}{11}c+\frac{13}{12}d\right)\left(\frac{9}{11}c-\frac{13}{12}d\right)$.

Ako razliku kvadrata a^2-b^2 napišemo u obliku produkta $(a+b)\cdot(a-b)$, kažemo da smo razliku kvadrata **rastavili na faktore**.

Pr. 3. Izračunajmo: $(\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{6}-\sqrt{7})=\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=6-7=-1$

Pr. 4. Izračunajmo:

$a)$ $78^2-68^2=(78-68)(78+68)=146\cdot 10=1460,$

b) $476^2-324^2=(476-324)(476+324)=800\cdot 152=121600,$

c) $(\frac{19}{8})^2-\left(\frac{13}{8}\right)^2=\left(\frac{19}{8}+\frac{13}{8}\right)\left(\frac{19}{8}-\frac{13}{8}\right)=\frac{32}{8}\cdot\frac{6}{8}=3.$

d) $x^2-9=(x+3)(x-3)$

e) $25a^2-81b^2=(5a+9b)(5a-9b)$

f) $\left(\frac{1}{16}-\frac{4}{9}x^2\right)=\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}x\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}x\right)$

g) $0{,}01a^2$-0,0001=$(0{,}1a+0{,}01)(0{,}1a-0{,}01)$

h) $x^2y^2-4=(xy+2)(xy\pm 2)$

i) $a^4-81=(a^2-9)(a^2+9)$=$(a+3)(a-3)(a^2+9)$

j) $(3x+2y)^2-4z^2$=$(3x+2y+2z)(3x+2y-2z)$

k) $8x^2y^4-18a^4b^2$= $2(4x^2y^4-9a^4b^2)=2(2xy^2+a^2b)(2xy^2-a^2b)$

Pr. 4. Izračunaj:

a) 108^2-98^2

$b)$ 273^2-173^2

$c)$$0{,}66^2-0{,}64^2$

$d)$ $\left(\frac{19}{6}\right)^2-\left(\frac{17}{6}\right)^2.$

Pr. 5. Izračunajmo primjenom razlike kvadrata:

$a)$ $54\cdot 46=(50+4)\cdot(50-4)=50^2-4^2=2500-16=2484,$

$b)$ $78 \cdot 62 = (70 + 8) \cdot (70 - 8) = 70^2 - 8^2 = 490 - 64 = 4836,$

$c)$ $4{,}7 \cdot 3{,}3 = (4 + 0{,}7) \cdot (4 - 0{,}7) = 4^2 - 0{,}7^2 = 16 - 0{,}49 = 15{,}51.$

Zadaci za vježbu:

1. Izračunaj tako da primijeniš razliku kvadrata:

$a)$ $97 \cdot 83$

$b)108 \cdot 92$

$c)10{,}4 \cdot 9{,}6$

$d)909 \cdot 891.$

2. Rastavi razliku kvadrata na faktore.

a) 9-x^2

b) 4x^2-16y^2

c) $\frac{1}{4}a^2$ - $\frac{9}{25}b^2$

d) 0,25x^2-0,36y^2.

Kub zbroja

Izračunajmo $(a + b)^3$.

To ćemo učiniti ovako:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$$
$$= (a + b)^2(a + b) =$$
$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) =$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 =$$
$$= \boldsymbol{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

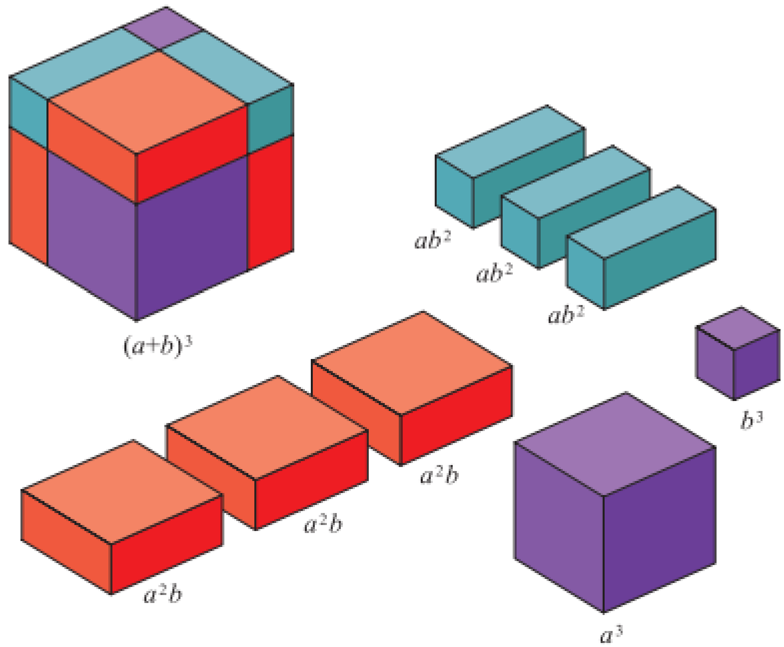
Dokazali smo formulu za kub zbroja dva broja, odnosno kub zbroja bilo koja dva monoma.

$$\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Ili shematski prikaz

$$(I+II)^3 = I^3 + 3I^2 \cdot II + 3I \cdot II^2 + II^3$$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$



Pr. 1. Izračunajmo

$a)(a+2)^3 = a^3 + 3a^2 \cdot 2 + 3a \cdot 2^2 + 2^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$

$b)(2a+3b)^3 = (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot 3b + 3 \cdot 2a \cdot (3b)^2 + (3b)^3$

$= 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$

$c)\ \left(\frac{1}{3}x+3\right)^3 = \left(\frac{1}{3}x\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}x\right)^2 \cdot 3 + 3 \cdot \frac{1}{3}x \cdot 3^3 = \frac{1}{27}x^3 + x^2 + 9x + 27$

$d)\ (0{,}2+5x^2)^3 = 0{,}008x^3 + 3 \cdot (0{,}2x)^2 \cdot 5x^2 + 3 \cdot 0{,}2x \cdot (5x^2)^2 + (5x^2)^3$

$= 0{,}002x^3 + 0{,}6x^4 + 15x^5 + 125x^6$

$e)\ (5x+2y)^3 = (5x)^3 + 3 \cdot (5x)^2 \cdot 2y + 3 \cdot 5x \cdot (2y)^2 + (2y)^3$

$= 125x^3 + 3 \cdot 25x^2 \cdot 2y + 3 \cdot 5x \cdot 4y^2 + 8y^3$

$= 125x^3 + 150x^2y + 60xy^2 + 8y^3$

$*\,f)\ (2x^{-2}+x^2)^3 = (2x^{-2})^3 + 3 \cdot (2x^{-2})^2 \cdot x^2 + 3 \cdot 2x^{-2} \cdot (x^2)^2 + (x^2)^3$

$= 8x^{-6} + 12x^{-2} + 6x^2 + x^6 = \frac{8}{x^6} + \frac{12}{x^2} + 6x^2 + x^6$

Zadaci za vježbu:

1. Izračunaj:

a) $(\frac{2}{3}a+\frac{1}{4}b)^3$

b) $(x^{m-n}+x^{n-m})$

c) $(ab-5c)^3$

d) $(3ab+5c)^3$

e) $(x^2+1)^3$

Kub razlike

Izračunajmo $(a-b)^3$:

$(a-b)^3=(a-b)(a-b)(a-b)=$

$=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)\cdot(a-b)=$

$=a^3-2a^2b+ab^2-2a2b+2ab^2-b^3=$

$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Dobili smo formulu:

$$\boxed{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$$

ili

$$(I-II)^3=I^3-3\cdot I^2\cdot II+3\cdot I\cdot II^2-II^3$$

Po ovoj formuli računamo kub razlike svaka dva broja, odosno kub razlike dvaju monoma.

Pr. 1. Izračunaj:

$a)\ (x-3)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2-3^3=x^3-9x^2+27x-27$

$b)\ \left(\frac{1}{3}-2x\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot 2x+3\cdot\frac{1}{3}\cdot(2x)^2-(2x)^3=\frac{1}{27}-\frac{2}{3}x+4x^2-8x^3$

$c)\ \left(\frac{3}{4}x^2-\frac{4}{3}y^3\right)^3=\left(\frac{3}{4}x^2\right)^3-3\cdot\left(\frac{3}{4}x^2\right)^2\cdot\frac{4}{3}y^3+3\cdot\frac{3}{4}x^2\cdot\left(\frac{4}{3}y^3\right)^2-\left(\frac{4}{3}y^3\right)^3$

$$=\frac{27}{64}x^6-3\cdot\frac{9}{16}x^4\cdot\frac{4}{3}y^3+3\cdot\frac{3}{4}x^2\cdot\frac{16}{9}\cdot y^6-\frac{64}{27}y^9$$

$$=\frac{27}{64}x^6-\frac{9}{4}x^4y^3+4x^2y^6-\frac{64}{27}y^9$$

$d)\ (2x^2-3y^3)^3=(2x^2)^3-3\cdot(2x^2)^2\cdot 3y^3+3\cdot 2x^2\cdot(3y^3)^2-(3y^3)^3$

$$=8x^6-36x^4y^3+54x^2y^6-27y^9$$

$e)\ (a-3)^3-8=a^3-3\cdot a^2\cdot 3+3\cdot a\cdot 9-27-8=a^3-9a^2+27a-35$

Zadaci za vježbu:

1.Izračunaj:

a)$(a-2b)^3$

b)$(2x-\frac{1}{2})^3$

c) $\left(\frac{1}{3}ab-\frac{1}{4}c\right)^3$

d) $(x-\frac{1}{3})^3$

e)$(3x-\frac{1}{3})^3$

<u>Zbroj kubova</u>

$$\boxed{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

Pr. 1. Izračunaj:

$a)\ x^3+7^3=(x+7)(x^2-x\cdot 7+7^2)=(x+7)(x^2-7x+49)$

$b)\ 64\,x^3+1=(4a)^3+1^3=(4a+1)((4x)^2-4a\cdot 1+1^2)$

$$=(4a+1)(16x^2-4x+1)$$

$c)27x^3+y^3=(3x)^3+y^3=(3x+y)((3x)^2-3x\cdot y+y^2)$

$$=(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$$

$d)\ \frac{1}{8}x^6+1=\left(\frac{1}{2}x^2\right)^3+1^3=\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+1\right)$

Zadaci za vježbu:

1. Izračunaj:

a) $27a^3+8b^3$

b) $8a^3b^3+1$

c) $1+64a^3$

d) $125a^3+64b^6$

e) $27x^6+\frac{1}{125}y^3$

Razlika kubova

$$\boxed{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

Pr. 1. Izračunaj:

$a)\ x^3-216=x^3-6^3=(x-6)(x^2+x\cdot 6+6^2)=(x-6)(x^2+6c+36)$

$b)\ 64-y^3=4^3-y^3=(4-y)(4^2+4y+y^2)=(4-y)(16+4y+y^2)$

$c)\ 125x^3-1=5^3x^3-1=(5x)^3-1^3=(5x-1)((5x)^2+5x\cdot 1+1^2)$
$=(5x-1)(25x^2+5x+1)$

$d)\ (a+3)^3-8=(a+3)^3-2^3=(a+3-2)((a+3)^2+(a+3)\cdot 2+2^2)$
$=(a+1)(a^2+6a+9+2a+6+4)=(a+1)(a^2+8a+19)$

$e)\ 24a^4-3ab^3=3a(8a^3-b^3)=3a(2a-b)\cdot(4a^2+2ab+b^2)$

Zadaci za vježbu:

1. Izračunaj:

a) $x^3 - 8$

b) $8y^3 - 27$

c) $x^6 - 125$

d) $\frac{1}{27}y^3 - 1$

e) $x^6 - y^6$