DODATAK UDŽBENIKU ZA 9. RAZRED DEVETOGODIŠNJE ŠKOLE SUSTAVA KATOLIČKIH ŠKOLA ZA EUROPU

Izrada: Nejra Suljić

Vedran Mihić

Lektorisala: Ivana Mostarac

Tehnička obrada: Edin Tabak

Sadržaj

RAZLOMLJENI RACIONALNI ALGEBARSKI IZRAZI

Uvod u cijele i razlomljene racionalne izraze

Različiti simboli poput -4, 1, 0, -2, 12 itd., predstavljaju razne veličine. Ukoliko upotrebljavamo simbol 4, to može biti 4 kg , 4 KM, 4 ovce, 4 automobila na parkingu ili 4 učenika u grupi. Takvi simboli, koji predstavljaju neku stalnu vrijednost (površina, masa, broj. itd.) nazivamo konstantnim ili stalnim veličinama. Konstantne veličine jednostavnije nazivamo konstante.

Često se spominju veličine koje mogu imati vrijednost redom 4 m, 6 m, 8 m. Ako se ta veličina mijenja, onda je označimo simbolom x, a, y, t, c ili nekim drugim slovom. Simbol c može označavati hipotenuzu pravokutnog trokuta ili simbol a može označavati duljinu stranice jednakostraničnog trokuta, itd.

To znači da se veličina a može mijenjati. Tako ove veličine, koje imaju promjenjivu vrijednost, nazivamo promjenjive veličine ili promjenjivim.

Promjenjive veličine su npr. x, y, z, t, u ,v, ... a, b, c, ...

Kada pomoću poznate operacije od konstanti obrazujemo izraz, onda se takav izraz naziva konstantni ili brojni racionalni izraz, npr. $4 \cdot 2^3 + 3^3 \cdot 9 - 2^2 =$ itd.

Ukoliko u konstantnom izrazu upotrijebimo operacije zbrajanje, oduzimanje, množenje i stupnjevanje, onda se takav izraz naziva cijeli racionalni brojevni izraz. Točnije, izraz formiran od konstantnih i promjenjivih veličina, a pomoću operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja i potenciranja naziva se ***cijeli racionalni izraz ili polinom***, kao na primjer:

$4 \cdot x + 2$; $3x^2 - 5x + 2$; $\frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{5}{6}$; $x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^2 - 5$

Kada prilikom formiranja izraza od konstantnih veličina upotrebljavamo i operaciju dijeljenja, pa se u brojnom izrazu dobije razlomak kojem su brojnik i nazivni polinomi, onda se takav izraz naziva ***razlomljeni racionalni konstantni izraz,*** a takvi izrazi su : $\frac{4\cdot2+3\cdot4^3}{2\cdot7-2}$; $\frac{12\cdot3^2-13\cdot4^3}{5^2+14}$; $itd.$

Definiranost razlomljenih racionalnih izraza

Zapisi napisani pomoću realnih brojeva, promjenjivih i racionalnih operacija nazivaju se algebarski razlomci. Kada formiramo razlomljeni racionalni izraz moramo voditi računa da se u imenovatelju (nazivniku ili djelitelju) ne javlja broj 0, jer se nulom ne može dijeliti tj. dijeljenje s nulom nema smisla (dijeljenje s nulom nije definirano).

Pr.1. **:** $\frac{5-(-4)\div2^2}{3-27\div9} = \frac{5+1}{3-3} = \frac{6}{0}$

Vrijednost promjenjive veličine za koju je definiran razlomljeni racionalni izraz naziva se domena ili područje definiranosti. Npr:

$$\frac{3x}{2-x};\qquad \frac{7}{y^2};\qquad \frac{a+2}{a^2-a-1};\qquad \frac{x^2-4x+9}{x^2-1};\qquad \frac{3b-5}{b-3}$$

Definirano područje (domena) je skup svih vrijednosti promjenjive veličine za koju je definiran razlomljeni racionalni izraz.

Zadatak 1. : Odredi za koje promjenjive vrijednosti je razlomljeni racionalni izraz definiran:

a) $\frac{3x}{2-x}$

Rješenje : $2-x\neq0$

$-x\neq-2\ \ /\cdot(-1)$

$x\neq2$

Izraz je definiran za sve x$\in R\setminus\{2\}$, tj. čitamo: izraz je definiran za svaki realan broj x osim broja 2, jer u tom slučaju nazivnik razlomka će biti 0, a dijeljenje s nulom nije definirano.

b) $\frac{x-1}{x^2-1}$

Rješenje: $x^2 - 1 \neq 0\ (razlika\ kvadrata)$

$$(x-1)\cdot(x+1) \neq 0$$

$$(umnožak\ je\ jedan\ nuli\ , ako\ je\ makar\ jedan\ od\ faktora\ jednak\ nuli\ )$$

$$x - 1 = 0\ \ \wedge\ x + 1 = 0$$

$$x = 1 \quad \wedge\ \ x = -1$$

Razlomljeni racionalni algebarski izraz je definiran za svako x∈ $R \setminus \{-1,1\}$.

c) $\frac{x^2-5x+9}{x^2+2}$

Rješenje: Izraz je definiran za svako x iz skupa realnih brojeva jer je nazivnik izraza $x^2 + 2$ pozitivan za svako x iz skupa R .

Zadatak 2. Za koje vrijednosti x izraz nije definiran:

a) $\frac{2x-1}{x+5}$

Rješenje : $x + 5 \neq 0 => x \neq -5$.

$$Izraz\ je\ definiran\ za\ sve\ vrijednosti\ osim\ za\ x = -5, jer\ je\ tada$$

$$x + 5 = -5 + 5 = 0, a\ dijeljenje\ sa\ nulom\ nije\ definirano\ .$$

b) $\frac{2x+1}{x^2+1}$

Rješenje :

$x^2 + 1 \neq 0 =>$

$$izraz\ je\ definiran\ za\ sve\ vrijednosti\ promjenjive\ x\ iz\ skupa\ R, jer\ je\ izraz$$

$$x^2 + 1\ uvijek\ pozitivan.$$

Zadaci za vježbu:

Odredi za koje vrijednosti varijable (promjenjive) x je izraz definiran:

$$a)\ \frac{x-2}{x-3} \quad b)\frac{2x-5}{x} \quad c)\frac{2x-7}{5x-11} \quad d)\frac{x-3}{x^2-1}$$

Proširivanje razlomljenih racionalnih izraza

Proširiti razlomak zadanim prirodnim brojem znači brojnik i nazivnik pomnožiti s tim brojem.

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \quad b\neq 0 \; i \; n\neq 0\,, broj\ n\ je\ faktor\ proširenja.}$$

Pr.1. : $\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{6}{10}$

Ako brojnik i nazivnik algebarskog razlomka razlomka pomnožimo istim brojem ili istim cijelim racionalnim izrazom različitim od nule, vrijednost algebarskog razlomka neće se promijeniti tj. dobije se novi razlomak koji je jednak datom razlomku.

Pr. 2. *Zadane razlomke proširiti s datim brojem:*

a) $\frac{3a}{7b},\ sa\ 5x$

$$\frac{3a}{7b}=\frac{3a\cdot 5x}{7b\cdot 5x}=\frac{15a\cdot x}{35b\cdot x}\,,\quad b\neq 0\quad i\quad x\neq 0$$

b) $\frac{a+b}{a-b}\,, sa\ \ a-b$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)(a-b)}=\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2},\quad a\neq b$$

c) $\frac{x-3}{x+5},\ sa\ \ x+3$

$$\frac{x-3}{x+5}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x+5)(x+3)}=\frac{x^2+3x-3x-9}{x^2+3x+5x+15}=\frac{x^2-9}{x^2+8x+15}\,, x\neq -5\,, x\neq -3$$

d) $\frac{x^2+5x}{x-1},\ sa\ 2x^3$

$$\frac{x^2+5x}{x-1}=\frac{(x^2+5x)\cdot 2x^3}{(x-1)\cdot 2x^3}=\frac{2x^5+10x^4}{2x^4-2x^3}\,,\quad x\neq 1, x\neq 0$$

Zadaci za vježbu :

Proširiti navedene razlomke :

a) $\frac{x^2-x}{x+8}$ $sa\ x-1$; $b)$ $\frac{5x+3}{4-x}$ $sa\ (x-1)(x+1)$ $c)$ $\frac{2x^4}{12ab^3}$ $sa\ x^4$ $d)$ $\frac{1+x^3}{a^2-1}$ $sa\ a+1$

Skraćivanje razlomljenih algebarskih izraza

Obrnut postupak od proširivanja je skraćivanje algebarskih razlomaka. Razlomci se skraćuju tako da se i brojnik i nazivnik datog razlomka podijeli istim brojem (ili izrazom) koji nije jednak nuli. Skraćivanjem razlomka njegova vrijednost se ne mijenja. Skraćivanjem razlomke svodimo na jednostavniji oblik ili do oblika neskrativosti.

Pr. 1. Skrati razlomke :

a) $\frac{8}{12}=\frac{8:4}{12:4}=\frac{2}{3}$

b) $\frac{27}{81}=\frac{27:27}{81:27}=\frac{1}{3}$

c) $\frac{2x^2y}{4xy^2}=\frac{2\cdot x\cdot x\cdot y}{4\cdot x\cdot y\cdot y}=\frac{x}{2y}$, $za\ x\neq 0\ i\ y\neq 0$

Zadatak 1. Skrati sljedeće razlomke :

a) $\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)(a-b)}=\frac{a+b}{a-b},$ $za\ a\neq b$

b) $\frac{4(x-2)(x+3)}{8(x-1)(x+3)^2}=\frac{x-2}{2(x-1)(x+3)}$, x$\neq 1, x\neq -3$

c) $\frac{6(a-3)x^2}{18(a-3)^4}=\frac{x^2}{3(a-3)^3}$, za a$\neq 3$

d) $\frac{a-1}{2(1-a)}=\frac{-1(1-a)}{2(1-a)}=\frac{-1}{2}$, $a\neq 1$

Zadatak 2. Skrati sljedeće razlomke :

Podsjetimo se: *Najprije brojnik i nazivnik rastavimo na čimbenike, a potom izvršimo kraćenje onim čimbenicima koji se pojavljuju i u brojniku i u nazivniku.*

a) $\frac{36x^2y^5z^3}{24x^3y^2z^2} = \frac{2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot x\cdot\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y\cdot z\cdot z\cdot z}{2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot x\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y\cdot z\cdot z} = \frac{3\cdot y\cdot y\cdot y\cdot z}{2x} = \frac{3y^3z}{2x}$;

Naravno da ćemo izbjegavati ispisivanje svih čimbenika, zato *postupak možemo svesti na oblik:*

$\frac{36x^2y^5z^3}{24x^3y^2z^2} = \frac{36}{24}\cdot\frac{x^2}{x^3}\cdot\frac{y^5}{y^2}\cdot\frac{z^3}{z^2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{y^3}{1}\cdot\frac{z}{1} = \frac{3y^3z}{2x}$;

Nakon dovoljne vježbe postupak se automatizira i još skrati.

b) $\frac{x^2-1}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}, \quad x \neq -1$;

c) $\frac{x^3+1}{2x^2-2x+2} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{2(x^2-x+1)} = \frac{x+1}{2}$;

d) $\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} = \frac{x^2+2x-x-2}{x^2+3x-x-3} = \frac{x(x+2)-(x+2)}{x(x+3)-(x+3)} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x+2}{x+3}, \quad x \neq -3$;

Zadaci za vježbu:

Skrati sljedeće razlomke:

a) $\frac{a^3-2a^2}{5a-10}$; *b)* $\frac{x^2-y^2}{4x+4y}$; *c)* $\frac{a^2-25}{a^2+10a+25}$; *d)* $\frac{(a-2)^3}{4(2-a)}$;

Dovođenje algebarskih racionalnih izraza na zajednički nazivnik

Često je potrebno razlomke različitih nazivnika svesti na jednake nazivnike. Proširivanjem razlomka brojem ili cijelim algebarskim izrazom, dva ili više razlomaka svodimo na jednake nazivnike, što se koristi kod operacija zbrajanja i oduzimanja razlomaka.

Da bismo razlomke sveli na zajednički nazivnik, koristimo najmanji zajednički sadržilac ili višekratnik tj. NZS illi V.

Primjeri: Zadane razlomke svedi na zajednički nazivnik:

a) $\frac{3}{6}\ i\ \frac{2}{4}$ $\quad V(6,4) = 12$ $\quad \frac{3}{6} = \frac{3 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \mathbf{\frac{6}{12}}$ $\quad \frac{2}{4} = \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \mathbf{\frac{6}{12}}$

b) $\frac{5a}{6x}\ \ i\ \ \frac{3x}{4a}$ $\quad V(6x, 4a) = 12ax$

$$\frac{5a}{6x} = \frac{5a \cdot 2a}{6x \cdot 2a} = \boldsymbol{\frac{10a^2}{12ax}} \qquad \frac{3x}{4a} = \frac{3x \cdot 3x}{4a \cdot 3x} = \boldsymbol{\frac{9x^2}{12ax}}$$

c) $\frac{3}{4}, \frac{x}{3}, \frac{x+5}{24}$ $\quad$ V(4,3,24)=24

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{18}{24} \qquad \frac{x}{3} = \frac{x \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{8x}{24} \qquad \frac{x+5}{24}$$

d) $\frac{x+3}{4}\ ,\ \frac{x-1}{12}\ ,\ \frac{x^2-1}{16}$ $\quad V(4,12,16) = 48$

$$\frac{x+3}{4} = \frac{12 \cdot (x+3)}{4 \cdot 12} = \frac{12 \cdot (x+3)}{48}$$

$$\frac{x-1}{12} = \frac{4 \cdot (x-1)}{12 \cdot 4} = \frac{4 \cdot (x-1)}{48}$$

$$\frac{x^2-1}{16} = \frac{3 \cdot (x^2-1)}{16 \cdot 3} = \frac{3 \cdot (x^2-1)}{48}$$

Zadatak 1. Zadane razlomke svedi na zajednički nazivnik:

a) $\frac{a+1}{a}\ ,\frac{a-1}{2a}\ ,\frac{3a}{a-1}$ $\quad$ V(a, 2a, a-1)= 2a(a-1)

$$\frac{a+1}{a} = \frac{(a+1)\cdot 2(a-1)}{a\cdot 2(a-1)} = \frac{2(a+1)(a-1)}{2a(a-1)}$$

$$\frac{a-1}{2a} = \frac{(a-1)(a-1)}{2a\cdot(a-1)} = \frac{(a-1)^2}{2a\cdot(a-1)}$$

$$\frac{3a}{a-1} = \frac{3a\cdot 2a}{(a-1)\cdot 2a} = \frac{6a^2}{2a(a-1)}$$

b) $\frac{3}{x-1}$, $\frac{x}{x+1}$, $\frac{5}{x^2-1}$ V(x-1, x+1 , $x^2-1) = (x-1)(x+1)$

$$\frac{3}{x-1} = \frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3(x+1)}{x^2-1} \quad (u\ nazivniku\ je\ razlika\ kvadrata)$$

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x(x-1)}{x^2-1} \qquad ; \qquad \frac{5}{x^2-1}$$

Zadatak 2. Svesti razlomke na zajednički nazivnik:

$$\frac{17xy}{1-a}, \ \frac{y}{1+a}\ , \frac{2x}{a^2-1} \qquad V(1-a.1+a, a^2-1) = (1-a)(1+a)$$

Treći razlomak napisati u malo drugačijem obliku:

$$\frac{2x}{a^2-1} = \frac{2x}{(-1)(1-a^2)} = (-1)\cdot\frac{2x}{(1-a)(1+a)}$$

Ostale razlomke treba proširivanjem svesti na iste nazivnike:

$$\frac{17xy}{1-a} = \frac{17xy\cdot(1+a)}{(1-a)(1+a)}$$

$$\frac{y}{1+a} = \frac{y(1-a)}{(1+a)(1-a)}$$

Zadatak 3. Razlomak $\frac{x+1}{x-1}$ $napiši\ kao\ razlomak\ s\ nazivnikom$:

a) $(x-1)^2$;

b) x^3-1 ;

Da bi se razlomak nazivnika a mogao napisati kao razlomak nazivnika b, on mora biti višekratnik od a .

Rješenje :

a) $(x-1)^2 = (x-1)(x-1)$ *kvadrat razlike, zbog toga je* :

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)} = \frac{x^2-1}{(x-1)^2}$$

b) $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ razlika kubova

$$\frac{\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}-1} = \frac{(\mathrm{x}+1)(\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1)}{(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1)} = \frac{\mathrm{x}^3+2\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}^3-1}$$

Zadaci za vježbu:

Svesti razlomke na zajednički nazivnik:

a) $\frac{1}{n+1}$, $\frac{2n}{1-n}$, $\frac{5}{n^2-1}$;

b) $\frac{2}{a+3}$, $\frac{a-1}{a-3}$, $\frac{a}{a^2-9}$;

c) $\frac{4}{x-5}$, $\frac{2x-1}{x+5}$, $\frac{x}{25-x^2}$

d) $\frac{1}{x^4}$, $\frac{2}{x^2}$, $\frac{1}{x}$

e) $\frac{1}{a^2-1}$, $\frac{a}{a^2-2a+1}$

f) $\frac{a}{a-4}$, $\frac{3}{a^2-16}$, $\frac{5}{a+4}$

g) $\frac{1}{a^2-1}$, $\frac{a}{a^2+2a+1}$

Zbrajanje i oduzimanje algebarskih racionalnih izraza

Algebarski racionalni razlomljeni izrazi mogu biti napisani i u složenijem obliku tj. kao zbroj, razlika, umnožak ili količnik dva ili više jednostavnijih izraza. Transformiranje takvih izraza obavlja se primjenom operacija: zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja algebarskih razlomaka.

Prisjetimo se zbrajanja i oduzimanja razlomaka različitih nazivnika?

Razlomci različitih nazivnika zbrajaju se tako da ih svedemo na zajednički nazivnik. Na taj način dobijemo razlomke jednakih nazivnika koje znamo zbrajati.

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{d\cdot b}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}}$$

Razlomci različitih nazivnika oduzimaju se tako da ih svedemo na zajednički nazivnik, a zatim ih oduzmemo.

$$\boxed{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{cb}{bd}=\frac{ad-cb}{bd}}$$

Pr. 1.:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 3+5\cdot 2}{12}=\frac{19}{12}$$

Pr.2.:

$$\frac{7}{12}-\frac{3}{8}=\frac{7\cdot 2-3\cdot 3}{24}=\frac{5}{24}$$

Ako primijenimo pravila zbrajanja i oduzimanja razlomaka na razlomljene racionalne algebarske izraze, možemo izvesti sljedeće tvrdnje:

Ako su A, B, C i X brojevi ili cjelobrojni algebarski izrazi, onda zbroj (razliku) možemo zapisati:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{A}{x}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x}=\frac{A+B+C}{x}\quad,\quad x\neq 0}}$$

Algebarske razlomke jednakih nazivnika zbrajamo tako da im zbrojimo brojnike, a nazivnike prepišemo**.** Ukoliko nazivnici razlomaka koje zbrajamo nisu jednaki, prvo ih svodimo na zajednički nazivnik metodom traženja najmanjeg zajedničkog sadržitelja ili višekratnika (NZS ili V).

Pr.3.

a) $\frac{2}{7x}+\frac{5}{7x}=\frac{2+5}{7x}=\frac{7}{7x}=\frac{1}{x}$; $x\neq 0$

(Nazivnici su u oba razlomka isti, zbog toga u postupku zbrajanja zajednički nazivnik prepišemo, a brojnike zbrojimo)

b) $\frac{5x}{x-7}+\frac{x}{x-7}=\frac{5x+x}{x-7}=\frac{6x}{x-7}$

c) $\frac{x-3}{2y-3}+\frac{2x}{2y-3}=\frac{x-3+2x}{2y-3}=\frac{3x-3}{2y-3}$

Pr.4.

a) $\frac{3}{x}-\frac{5}{x}=\frac{3-5}{x}=\frac{-2}{x}$; $x\neq 0$

b) $\frac{3}{2a-1}-\frac{5a}{2a-1}=\frac{3-5a}{2a-1}$; a$\neq \frac{-1}{2}$

c) $\frac{a-b}{a+b}-\frac{b}{a+b}=\frac{a-b-b}{a+b}=\frac{a-2b}{a+b}$; $a\neq -b$

Prilikom oduzimanja razlomaka, razlomačka crta ima istu ulogu kao i zagrada u algebarskom izrazu, npr.

d) $\frac{2x+y}{x-y}-\frac{x-2y}{x-y}=\frac{2x+y-(x-2y)}{x-y}=\frac{2x+y-x+2y}{x-y}=\frac{x+3y}{x-y}$

e) $\frac{2x-3}{x^2-1}-\frac{5-3x}{x^2-1}=\frac{2x-3-(5-3x)}{x^2-1}=\frac{2x-3-5+3x}{x^2-1}=\frac{5x-8}{x^2-1}=\frac{5x-8}{(x-1)(x+1)}$

Kada nazivnici razlomaka koje zbrajamo nisu jednaki onda na osnovu prethodno navedenog svodimo ih proširivanjem na razlomke jednakih nazivnika, a zatim obavimo zbrajanje ili oduzimanje.

Pr. 5.

a) $\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a}=\frac{2}{a^2}+\frac{3\cdot a}{a\cdot a}=\frac{2+3a}{a^2}$

$b)$ $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}=\frac{x\cdot(x-1)}{(x+1)(x-1)}+\frac{x\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x^2-x+x^2+x}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x^2}{x^2-1}$;

$x\neq \pm 1$

c) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{x^3\cdot y+xy^3+x^4+y^4}{x^2y^2}$;

d) $\frac{x-2}{x^2+2x}+\frac{2+x}{x^2-2x}-\frac{4x}{x^2-4}=\frac{(x-2)^2+(x+2)^2-4x^2}{x(x-2)(x+2)}=$

$=\frac{x^2-\cancel{4x}+4+x^2+\cancel{4x}+4-4x^2}{x(x-2)(x+2)}=$

$=\frac{-2\cancel{(x^2-4)}}{x\cancel{(x^2-4)}}=\frac{-2}{x}$

(Uputa: nazivnike rastavimo na faktore primjenom neke od poznatih formula, izlučivanjem zajedničkog faktora ili grupiranjem pa izlučivanjem.)

Pr. 6. Izvrši naznačene računske operacije s algebarskim razlomcima:

$$\frac{x-2y}{y}+\frac{5x+6y}{2x}-\frac{x+3y}{4y}=\frac{(x-2y)\cdot 4x}{y\cdot 4x}+\frac{(5x+6y)\cdot 2y}{2x\cdot 2y}-\frac{(x+3y)\cdot x}{4y\cdot x}=$$

$$=\frac{4x(x-2y)}{4xy}+\frac{2y(5x+6y)}{4xy}-\frac{x(x+3y)}{4xy}=$$

$$=\frac{4x^2-8xy+10xy+12y^2-x^2-3xy}{4xy}=$$

$$=\frac{3x^2-xy+12y^2}{4xy}\ ;\ (x\neq 0\,, y\neq 0)$$

Pr. 7. Izvrši naznačene računske operacije s algebarskim razlomcima:

$$\frac{x}{x-y}+\frac{y}{x+y}-\frac{2y}{x}=\frac{x^2\cdot(x+y)+xy(x-y)-2y(x-y)(x+y)}{x(x-y)(x+y)}=$$

$$=\frac{x^3+x^2y+x^2y-xy^2-2y(x^2-y^2)}{x(x-y)(x+y)}=$$

$$=\frac{x^3+x^2y+x^2y-xy^2-2x^2y+2y^3}{x(x-y)(x+y)}=$$

$$=\frac{x^3-xy^2+2y^3}{x(x^2-y^2)}\ ;(x\neq 0\,,x\neq y,x\neq -y)$$

Pr. 8.

$$\frac{2}{x-3}-\frac{4}{x+3}+\frac{3x}{x^2-9}=\frac{2}{x-3}-\frac{4}{x+3}+\frac{3x}{(x-3)(x+3)}=\frac{2(x+3)-4(x-3)+3x}{(x-3)(x+3)}=$$

$$=\frac{2x+6-4x+12+3x}{(x-3)(x+3)}=\frac{2x-4x+3x+6+12}{x^2-3^2}=\frac{x+18}{x^2-9}$$

Pr. 9.

$$\frac{x-1}{xy^2}+\frac{1-y}{x^2y}=\frac{x-1}{x\cdot y\cdot y}+\frac{1-y}{x\cdot x\cdot y}=\frac{x\cdot(x-1)+y\cdot(1-y)}{x\cdot x\cdot y\cdot y}=\frac{x^2-x+y-y^2}{x^2y^2}=$$

$$=\frac{x^2-y^2-x+y}{x^2y^2}=\frac{(x-y)(x+y)-1\cdot(x-y)}{x^2y^2}=\frac{(x-y)(x+y-1)}{x^2y^2}$$

Za samostalan rad:

a) $\frac{x-1}{5x}+\frac{2}{25x}-\frac{2+x}{15x}=$

b) $\frac{a}{2b}+\frac{4}{3a}+\frac{1-a}{ab}=$

c) $\frac{a-3b}{a+b}-\frac{3a-b}{a-b}-2=$

d) $\frac{3}{x-1}+\frac{x}{x+1}-\frac{5}{x^2-1}=$

e) $\frac{a}{a-4}+\frac{3}{a^2-16}-\frac{6}{a+4}=$

Množenje i dijeljenje algebarskih racionalnih izraza

Množenje algebarskih razlomaka vrši se na isti način kao i množenje običnih razlomaka:

$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$, $3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$, $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{11} = \frac{6}{385}$.

Prilikom množenja razlonaka treba obratiti pozornost može li se izvršiti skraćivanje razlomaka:

$\frac{4}{25} \cdot \frac{15}{16} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$, $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{6}$, $8 \cdot \frac{5}{12} = 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$.

Umnožak dvaju razlomaka je razlomak čiji je brojnik umnožak brojnika, a nazivnik umnožak nazivnika razlomaka koje množimo. U slučaju kada su brojnici i nazivnici polinomi koje možemo rastaviti na čimbenike, prvo učinimo to, a onda se množenje svodi na skraćivanje razlomaka, te tako svodimo izraz na jednostavniji oblik.

Dijeljenje algebarskih razlomaka vrši se na isti način kao i dijeljenje običnih razlomaka. Npr. $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$, $3 : \frac{4}{5} = 3 \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$, $\frac{3}{7} : 5 = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{35}$.

Dakle, iz primjera se vidi da je najjednostavniji put dijeljenja pretvoriti u množenje, a onda vršiti operaciju po pravilu množenja racionalnih izraza.

Pr. 1.

$$\frac{2x-2y}{3a-3b} \cdot \frac{a-b}{x-y} = \frac{2(x-y)}{3(a-b)} \cdot \frac{a-b}{x-y} = \frac{2}{3}$$

Pr. 2.

$$\frac{2x-4}{3a-1} \cdot \frac{1-3a}{2-x} = \frac{2(x-2)}{3a-1} \cdot \frac{-(3a-1)}{-(x-2)} = \frac{2(x-2)}{3a-1} \cdot \frac{3a-1}{x-2} = 2$$

Pr. 3.

$$\frac{a^3-ab^2}{a^2b+b^3} \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{a(a^2-b^2)}{b(a^2+b^2)} \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{a}{b}$$

Pr. 4.

$$\frac{a+6}{a-3}\cdot\frac{a^2-6a+9}{a^2+12a+36}=\frac{a+6}{a-3}\cdot\frac{(a-3)^2}{(a+6)^2}=\frac{a-3}{a+6}$$

Pr. 5.

$$\frac{2a^2+4a+2}{a^2-1}\cdot\frac{a^3-1}{a^2-a}=\frac{2(a^2+2a+1)}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a(a-1)}=$$

$$=\frac{2(a+1)^2}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a(a-1)}=\frac{2(a+1)(a^2+a+1)}{a(a-1)}$$

Pr. 6.

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{6ab^2}{a^2+2ab+b^2}=\frac{b+a}{ab}\cdot\frac{6ab^2}{(a+b)^2}=\frac{6b}{a+b}$$

Pr. 7.

$$\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{x^2}{(x+y)^2}-\frac{x}{x-y}\right)\cdot\frac{x^2-y^2}{xy}=$$

$$=\left(\frac{x(x+y)-x^2}{(x+y)^2}+\frac{x^2-x(x-y)}{(x-y)^2}\right)\cdot\frac{x^2-y^2}{xy}=$$

$$=\left(\frac{x^2+xy-x^2}{(x+y)^2}+\frac{x^2-x^2+xy}{(x-y)^2}\right)\cdot\frac{x^2-y^2}{xy}=$$

$$=\left(\frac{xy}{(x+y)^2}+\frac{xy}{(x-y)^2}\right)\cdot\frac{x^2-y^2}{xy}=$$

$$=\frac{xy(x-y)^2+xy(x+y)^2}{(x+y)^2(x-y)^2}\cdot\frac{(x-y)(x+y)}{xy}=$$

$$=\frac{xy[(x-y)^2+(x+y)^2]}{(x+y)^2(x-y)^2}\cdot\frac{(x-y)(x+y)}{xy}=\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}=$$

$$=\frac{x^2-2xy+y^2+x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}=\frac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2}=\frac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2}.$$

Pr. 8.

$$\left(\frac{x-1}{x+2}+1\right)\cdot\left(\frac{x^2+1}{2x+1}-\frac{x}{2}\right)=\frac{x-1+x+2}{x+2}\cdot\frac{2(x^2+1)-x(2x+1)}{2(2x+1)}=$$

$$=\frac{2x+1}{x+2}\cdot\frac{2x^2+2-2x^2-x}{2(2x+1)}=\frac{2x+1}{x+2}\cdot\frac{2-x}{2(2x+1)}=\frac{2-x}{2(x+2)}$$

Pr. 9.

$$\frac{4x-4y}{3x+3y}:\frac{12x-12y}{x^2-y^2}=\frac{4(x-y)}{3(x+y)}:\frac{12(x-y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{4(x-y)}{3(x+y)}\cdot\frac{(x-y)(x+y)}{12(x-y)}=\frac{x-y}{9}$$

Pr. 10.

$$\frac{a^2-2a+1}{x^2-2x}:\frac{a^2-a}{x^2-4}=\frac{(a-1)^2}{x(x-2)}:\frac{a(a-1)}{(x-2)(x+2)}=\frac{(a-1)^2}{x(x-2)}\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{a(a-1)}=\frac{(a-1)(x+2)}{ax}$$

Pr. 11.

$$\left(1-\frac{3x^2}{1-x^2}\right):\left(\frac{x}{x+1}+1\right)=$$

$$=\frac{1-x^2-3x^2}{1-x^2}:\frac{x+x+1}{x+1}=\frac{1-4x^2}{1-x^2}:\frac{2x+1}{x+1}=\frac{(1-2x)(1+2x)}{(1-x)(1+x)}\cdot\frac{x+1}{2x+1}=\frac{1-2x}{1-x}=\frac{2x-1}{x-1}$$

Pr. 12.

$$\left(\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{2x-1}{2x+1}\right):\frac{4x}{6x+3}=\frac{(2x+1)^2-(2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)}\cdot\frac{3(2x+1)}{4x}=\frac{4x^2+4x+1-(4x^2-4x+1)}{2x-1}\cdot\frac{3}{4x}=$$

$$\frac{4x^2+4x+1-4x^2+4x-1}{2x-1}\cdot\frac{3}{4x}=\frac{8x}{2x-1}\cdot\frac{3}{4x}=\frac{6}{2x-1}$$

Pr. 13.

$$\frac{ax+a}{x^2-x+1}:\left(\frac{1}{x+1}+\frac{3x}{x^3+1}\right)=$$

$$\frac{a(x+1)}{x^2-x+1}:\frac{x^2-x+1+3x}{x^3+1}=\frac{a(x+1)}{x^2-x+1}\cdot\frac{x^3+1}{x^2+2x+1}=\frac{a(x+1)}{x^2-x+1}\cdot\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)^2}=a$$

Pr. 14.

$$\left(\frac{x^2-x-3}{x-4}-x+2\right):\frac{25x^2-110+121}{x^2-2x-8}=\frac{x^2-x-3-x(x-4)+2(x-4)}{x-4}\cdot\frac{x^2-2x-8}{25x^2-110+121}=$$

$$\frac{x^2-x-3-x^2+4x+2x-8}{x-4}\cdot\frac{x^2-4x+2x-8}{(5x-11)^2}=\frac{5x-11}{x-4}\cdot\frac{x(x-4)+2(x-4)}{(5x-11)^2}=\frac{5x-11}{x-4}\cdot\frac{(x-4)(x+2)}{(5x-11)^2}=\frac{x+2}{5x-11}$$

Zadaci za vježbu:

1. $\frac{(5-a)^2}{6ab-b^2}\cdot\frac{b-6a}{5a^2-25a}$
2. $\frac{(a-2)^2}{a^2-5a}\cdot\frac{2a-10}{4-a^2}$
3. $\frac{a^2-9a}{a^2-6a+9}\cdot\frac{a^2-9}{9-a}$
4. $\frac{a-1}{8a-2a^3}\cdot\frac{4a-2a^2}{1-a}$
5. $\left(a-\frac{a^2+4}{4}\right)\cdot\frac{8}{4-a^2}$
6. $\left(\frac{1}{a}-\frac{a+2}{2a+1}\right)\cdot\frac{a-4a^3}{a^2-1}$
7. $\left(\frac{2}{3a}-\frac{a}{2a^2-2}\right)\cdot\frac{3a-3a^2}{2a+4}$
8. $\left(\frac{2}{a}-\frac{a+4}{a-2}\right)\cdot\frac{a^2}{a^3-8}$
9. $\left(\frac{2a-1}{a+2}-1\right)\cdot\frac{a^2+2a}{a^2-9}$
10. $\frac{(2x-3)^2}{3x+1}:\frac{9-4x^2}{6x^2+2x}$
11. $\frac{(5-x)^2}{6xy-y^2}:\frac{5x-25}{y-6x}$
12. $\frac{1-4x^2}{x^2-4x}:\frac{(2x-1)^2}{x^2-16}$
13. $\left(\frac{2a^2-2}{a^2+ab}:\frac{1-a}{a+b}\right)\cdot\frac{1}{a^3+1}$
14. $\left(4-\frac{4+a^2}{a}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a}\right)$
15. $\left(\frac{1}{a^2-2a}-\frac{2}{a^2-4}\right):\frac{1}{a^2+4a+4}$